

## ETUDE PHENOMENOLOGIQUE D'UNE COUCHE LIMITE TURBULENTE AVEC ASPIRATION ET CHAUFFAGE A LA PAROI

E. VEROLLET, L. FULACHIER et I. DEKEYSER

Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence, Laboratoire Associé aux C.N.R.S.,  
12, avenue du Général Leclerc, 13003 Marseille, France

(Reçu le 21 Juin 1976)

**Résumé**—Une vérification des hypothèses généralement admises dans la région interne d'une couche limite turbulente avec chauffage et aspiration à la paroi est effectuée. Dans la région pleinement turbulente de la couche limite, une expression analytique est proposée pour le profil de température avec aspiration. Elle permet de déduire le profil de température avec aspiration de celui de vitesse sans aspiration.

### NOTATIONS

<p><math>A</math>,   taux d'aspiration, <math>A = -\rho_p V_p / \rho_e U_e</math>;  <math>A^+</math>,   taux d'aspiration réduit, <math>A^+ = -V_p / U^*</math>;  <math>C_f</math>,   coefficient de frottement local à la paroi,  <math>C_f = \tau_p / \frac{1}{2} \rho_e U_e^2</math>;  <math>C_p</math>,   chaleur spécifique à pression constante;  <math>H</math>,   paramètre de forme, <math>H = \delta_1 / \delta_2</math>;  <math>K</math>,   constante de von Kármán;  <math>k</math>,   coefficient de conductivité de l'air;  <math>l</math>,   longueur de mélange de Prandtl;  <math>P</math>,   pression moyenne;  <math>Pr</math>,   nombre de Prandtl, <math>Pr = \nu / \alpha</math>;  <math>Pr_t</math>,   nombre de Prandtl de la turbulence,  <math>Pr_t = \nu_t / \alpha_t</math>;  <math>q</math>,   densité moyenne de flux de chaleur  orthogonalement à la paroi;  <math>St</math>,   nombre de Margouliis-Stanton,  <math>St = q_p / \rho_e C_p U_e (\Theta_p - \Theta_e)</math>;  <math>u, v, w</math>,   composantes de la vitesse instantanée  respectivement selon les directions <math>x, y, z</math>;  <math>U_e</math>,   vitesse de l'écoulement extérieur;  <math>U^*</math>,   vitesse de frottement, <math>U^* = (\tau_p / \rho_p)^{1/2}</math>;  <math>u^+</math>,   = <math>\bar{u} / U^*</math>;  <math>V_p</math>,   vitesse d'aspiration à la paroi;  <math>X'</math>,   distance au début de l'aspiration dans la  direction <math>x</math>;  <math>x, y, z</math>,   coordonnées rectangulaires (Fig. 1);  <math>y^+</math>,   = <math>y U^* / \nu</math>.</p>	<p><math>\delta_i</math>,   épaisseur d'enthalpie,  <math display="block">\delta_i = \int_0^{h&gt;\delta} (\bar{\rho} \bar{u} / \rho_e U_e) \times [1 - (\Theta_p - \bar{\theta}) / (\Theta_p - \Theta_e)] dy</math>;  <math>\Theta_e, \Theta_p</math>,   températures de l'écoulement extérieur et  de la paroi;  <math>\Theta^*</math>,   échelle de température, <math>\Theta^* = q_p / \rho_p C_p U^*</math>;  <math>\theta</math>,   température instantanée;  <math>\theta^+</math>,   = <math>(\Theta_p - \bar{\theta}) / \Theta^*</math>;  <math>\mu</math>,   coefficient de viscosité moléculaire;  <math>\nu</math>,   coefficient de viscosité cinématique, <math>\nu = \mu / \rho</math>;  <math>\nu_t</math>,   coefficient de diffusion turbulente de quantité  de mouvement, <math>-\bar{u}'v' = \nu_t \partial u / \partial y</math>;  <math>\rho</math>,   masse volumique;  <math>\tau</math>,   tension moyenne de frottement.</p> <p><b>Indices</b></p> <p><math>A</math>,   avec taux d'aspiration <math>A</math>;  <math>e</math>,   à l'extérieur de la couche limite;  <math>0</math>,   sans aspiration;  <math>p</math>,   à la paroi.</p> <p><b>Conventions</b></p> <p><math>\bar{\quad}</math>,   valeur moyenne, <math>g = \bar{g} + g'</math> avec <math>\bar{g}' = 0</math>;  <math>\overline{\quad}</math>,   valeur fluctuante, <math>\overline{g'} = 0</math>;  <math>\sim</math>,   valeur moyenne pondérée par la masse,  <math>\tilde{g} = \bar{\rho} \overline{g} / \bar{\rho}</math>;  <math>\overline{\quad}</math>,   valeur fluctuante, <math>\overline{\rho g'} = 0</math>.</p>
---	---

### Symboles grecs

<p><math>\alpha</math>,   coefficient de diffusivité thermique,  <math>\alpha = \bar{k} / \bar{\rho} C_p</math>;  <math>\alpha_t</math>,   coefficient de diffusivité turbulente de chaleur,  <math>-\overline{\theta'v'} = \alpha_t (\partial \bar{\theta} / \partial y)</math>;  <math>\delta</math>,   épaisseur de couche limite à <math>\bar{u} = U_e</math>;  <math>\delta_a</math>,   valeur de <math>\delta</math> à <math>X' = -100</math> mm;  <math>\delta_1</math>,   épaisseur de déplacement,  <math display="block">\delta_1 = \int_0^{h&gt;\delta} (1 - \bar{\rho} \bar{u} / \rho_e U_e) dy</math>;  <math>\delta_2</math>,   épaisseur de quantité de mouvement,  <math display="block">\delta_2 = \int_0^{h&gt;\delta} (\bar{\rho} \bar{u} / \rho_e U_e) (1 - \bar{u} / U_e) dy</math>;</p>
---

### 1. INTRODUCTION

DES EXPRESSIONS analytiques pour les profils de vitesse moyenne dans le cas des couches limites turbulentes avec transfert de masse à la paroi ont été proposées par différents auteurs, notamment par Black et Sarnecki [1], Stevenson [2], Tennekes [3], Simpson *et al.* [4].

Pour obtenir de telles expressions il est nécessaire d'introduire des hypothèses phénoménologiques.

Le présent article a pour but, d'une part, de voir dans quelle mesure ces hypothèses, généralement admises, sont vérifiées, d'autre part, de proposer une expression analytique pour les profils de température moyenne.

## 2. EQUATIONS STATISTIQUES

(i) Les équations [5, 6] présentées ci-après sont relatives à une couche limite turbulente se développant sur une plaque plane chauffée. Il s'agit d'un écoulement d'air à faible vitesse ( $U_e \simeq 12 \text{ ms}^{-1}$ ), bidimensionnel en moyenne, à variations de température modérées ( $\Theta_p - \Theta_e \simeq 20 \text{ K}$ ), pour lequel les effets de gravité sont négligeables.

L'équation statistique de bilan de masse s'écrit, en introduisant les moyennes pondérées par la masse [5]:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} \simeq 0. \quad (1)$$

On montre que [7, 6]  $\bar{u} \simeq \bar{u}$ ; par contre  $\bar{\rho} \bar{v} = \bar{\rho} \bar{v} + \overline{\rho' v'}$  n'est pas en général équivalent à  $\bar{\rho} \bar{v}$ , puisque, les valeurs de  $\overline{\rho' v'}$  ne sont pas toujours négligeables par rapport à celles de  $\bar{\rho} \bar{v}$ , notamment au voisinage de la paroi en l'absence d'aspiration ou de soufflage.

L'équation statistique de bilan de quantité de mouvement selon l'axe (0, x) s'écrit, compte tenu de l'équation selon l'axe (0, y):

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \simeq - \frac{dP_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u' v'} \right) - \frac{\partial \bar{\rho} (\bar{u}^2 - \bar{v}^2)}{\partial x}. \quad (2)$$

En effet [6, 7],  $\overline{\rho u' v'} \simeq \overline{\rho u' v'} \simeq \overline{\rho u' v'}$ ,  $\overline{\rho u'^2} \simeq \overline{\rho u'^2} \simeq \overline{\rho u'^2}$  et  $\overline{\rho v'^2} \simeq \overline{\rho v'^2} \simeq \overline{\rho v'^2}$ .

Par ailleurs, l'équation statistique d'enthalpie se met sous la forme:

$$C_p \left( \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) \simeq \bar{\varphi} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - \bar{\rho} C_p \overline{\theta' v'} \right) \quad (3)$$

car  $\bar{\theta} \simeq \bar{\theta}$  et  $\overline{\rho \theta' v'} \simeq \overline{\rho \theta' v'} \simeq \overline{\rho \theta' v'}$ .

La production de chaleur  $\bar{\varphi}$  par effet de viscosité est négligeable sauf au voisinage immédiat de la paroi ( $y^+ \leq 10$  à 15). Dans la sous-couche visqueuse elle diffère peu de  $\mu (\partial \bar{u} / \partial y)^2$ : dans le cas de nos expériences, l'échauffement correspondant [8] est très faible (0,06 K).

(ii) L'intégration de l'équation (1) donne la densité de flux de masse normalement à la paroi:

$$\bar{\rho} \bar{v} = \rho_p V_p - \int_0^y \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} dy. \quad (4)$$

Pour une distance  $h \gtrsim \delta$  on en déduit, en supposant  $\rho_e$  indépendant de  $x$ :

$$\frac{\bar{\rho} \bar{v}}{\rho_e U_e} = -A + \frac{h - \delta_1}{\rho_e U_e^2} \frac{dP_e}{dx} + \frac{d\delta_1}{dx}. \quad (5)$$

Cette formule généralise celle obtenue dans le cas d'une couche limite isotherme [9].

La tension moyenne de frottement, obtenue à partir de (2), s'écrit:

$$\begin{aligned} \tau &\equiv \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u' v'} \\ &= - \int_y^h \left[ \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \left( \rho_p V_p - \int_0^y \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} dy \right) \right] dy \\ &\quad - \int_y^h \frac{dP_e}{dx} dy - \int_y^h \frac{\partial \bar{\rho} (\bar{u}^2 - \bar{v}^2)}{\partial x} dy. \quad (6) \end{aligned}$$

La dernière intégrale étant négligeable [7], cette équation permet de déterminer  $\tau$  lorsque l'on connaît les répartitions de vitesse et de température moyenne. On obtient en particulier à la paroi:

$$\tau_p = \frac{d}{dx} (\rho_e U_e^2 \delta_2) + \rho_e U_e^2 \delta_1 \frac{dU_e}{dx} - \rho_p V_p U_e \quad (7)$$

d'où le coefficient de frottement local:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\delta_2}{dx} - (H+2) \frac{\delta_2}{\rho_e U_e^2} \frac{dP_e}{dx} + A. \quad (8)$$

Dans le cas d'un écoulement isotherme sans aspiration, on retrouve l'équation intégrale de quantité de mouvement de von Kármán [10].

De façon analogue, la densité moyenne de flux de chaleur normalement à la paroi, déduite de (3), est donnée par:

$$\begin{aligned} q &\equiv -\bar{k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{\rho} C_p \overline{\theta' v'} \\ &= C_p \int_y^h \left[ \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \left( \rho_p V_p - \int_0^y \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} dy \right) \right] dy. \quad (9) \end{aligned}$$

On en déduit, en supposant  $\Theta_e$  indépendant de  $x$ :

$$q_p = C_p \left[ \frac{d}{dx} [\rho_e U_e (\Theta_p - \Theta_e) \delta_1] - \rho_p V_p (\Theta_p - \Theta_e) \right]. \quad (10)$$

Par suite, si  $\Theta_p$  est constant, le nombre de Margoulis-Stanton s'écrit:

$$S_t = \frac{d\delta_1}{dx} - \frac{\delta_1}{\rho_e U_e^2} \frac{dP_e}{dx} + A. \quad (11)$$

## 3. EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES PROFILS DE VITESSE ET DE TEMPERATURE MOYENNES

Les diverses hypothèses phénoménologiques et les expressions des profils moyens qui vont être introduites ci-après seront vérifiées pour la couche limite turbulente pleinement développée d'une plaque plane chauffée dans le cas où le début du chauffage coïncide avec celui de l'aspiration et dans celui où il est pratiquement confondu avec la ligne de transition à la turbulence (Fig. 1).

(i) Validité des relations généralement admises

Dans le cas d'une faible aspiration à travers la paroi, on admet que, dans la région interne de la couche

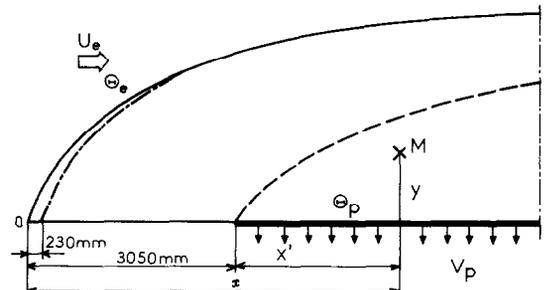


FIG. 1 Schéma expérimental. —, frontière conventionnelle de la couche limite; isotherme  $\bar{\theta} = \Theta_e$ . --- cas No. 1,  $\Theta_p - \Theta_e \simeq 21 \text{ K}$ ; - - - - cas No. 2,  $\Theta_p - \Theta_e \simeq 22 \text{ K}$ .

limite, les relations suivantes sont vérifiées:

$$\bar{\rho}\bar{v} \simeq \rho_p V_p \quad (12)$$

$$\tau - \rho_p V_p \bar{u} \simeq \tau_p. \quad (13)$$

En considérant les équations (4) et (6), on remarque que ces relations reviennent à supposer que les variations par rapport à  $x$  sont négligeables.

Dans le cas où il n'y a pas d'aspiration, on retrouve l'hypothèse classique que l'on fait dans la région interne de la couche limite [11]:  $\tau \simeq \tau_p$ .

Pour les conditions expérimentales adoptées, dans la région interne ( $y \lesssim 0,2\delta_0$ ), on constate sur la Fig. 2 que la relation (12) est d'autant mieux vérifiée que le taux d'aspiration est plus fort; la Fig. 3 montre qu'il en est de même pour (13).

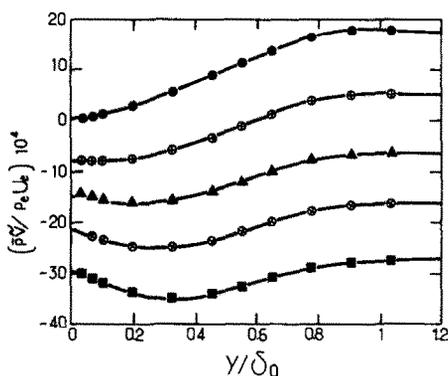


FIG. 2. Densité de flux de masse normalement à la paroi (cas No. 1).  $U_e = 12 \text{ ms}^{-1}$ ;  $\delta_0 = 62 \text{ mm}$ ;  $\Theta_p - \Theta_e \simeq 21 \text{ K}$ ;  $X' = 13\delta_a$ ;  $\delta_a = 48 \text{ mm}$ . ●,  $A = 0$ ; ○,  $A = 0.0008$ ; ▲,  $A = 0.0015$ ; □,  $A = 0.0022$ ; ■,  $A = 0.0030$ .

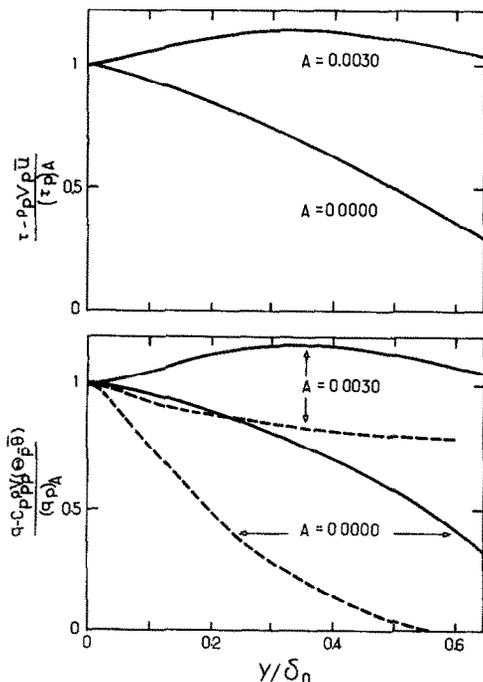


FIG. 3. Variation de  $\tau - \rho_p V_p \bar{u}$  et de  $q - C_p \rho_p V_p (\Theta_p - \bar{\theta})$  en fonction de la distance à la paroi.  $U_e = 12 \text{ ms}^{-1}$ ;  $\delta_0 = 62 \text{ mm}$ ;  $X' = 13\delta_a$ ;  $\delta_a = 48 \text{ mm}$ . ----, cas No. 1; —, cas No. 2.

Lorsque les conditions aux limites de vitesse et de température moyennes sont analogues, on peut écrire, avec une approximation similaire à celle faite pour établir (13):

$$q - \rho_p V_p C_p (\Theta_p - \bar{\theta}) \simeq q_p. \quad (14)$$

Sans aspiration, on retrouve [12]:  $q \simeq q_p$ .

Effectivement la Fig. 3 montre que, dans le cas d'expérience No. 2, la relation (14) est vérifiée dans les mêmes limites que (13). Il n'en est évidemment pas de même dans le cas d'expérience No. 1 pour lequel les dérivées par rapport à  $x$  sont importantes principalement sans aspiration.

(ii) Expressions analytiques des profils de vitesse moyenne

La distribution de vitesse moyenne dans une couche limite turbulente avec faible aspiration (ou injection) a fait l'objet de nombreuses études. Les méthodes, semblables à celles utilisées dans le cas d'un écoulement sans débit de masse à travers la paroi, relèvent essentiellement des théories phénoménologiques de longueur de mélange et de loi de similitude. Si ces méthodes ne permettent pas de décrire la structure fine de la turbulence, elles aident notamment à la compréhension des mécanismes globaux.

En admettant les relations (12) et (13), l'analyse dimensionnelle montre que la distribution de vitesse dans la région interne, pour un gaz à propriétés physiques constantes, s'écoulant sur une paroi rigide et lisse, doit être de la forme [4]:

$$u^+ = f(y^+, A^+). \quad (15)$$

Dans la sous-couche visqueuse, où les tensions de Reynolds sont négligeables, la relation (13) permet d'obtenir:

$$u^+ = \frac{1}{A^+} (1 - e^{-4^+ y^+}). \quad (16)$$

En ce qui concerne la région pleinement turbulente, deux groupes de méthodes sont utilisées: celles des échelles caractéristiques [3, 13, 7] et celles faisant intervenir la longueur de mélange de Prandtl [1, 2, 14, 7].

Dans le second groupe de méthodes, la couche pleinement turbulente est décrite par la relation (13) et les expressions:

$$-\overline{u'v'} = l^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (17)$$

$$l = Ky \quad (18)$$

où  $K$  est la constante de Kármán dont la valeur est comprise, selon les auteurs, entre 0,38 et 0,43. La valeur de  $K$  est supposée indépendante de l'aspiration (ou injection); en fait, on constate sur la Fig. 4 que  $l$  augmente en fonction de l'aspiration et diminue avec l'injection [15]. Ceci est en accord avec les études spectrales de Dumas [16] et Fulachier [17] montrant que la turbulence avec aspiration est à plus grande échelle que sans aspiration. Toutefois Andersen, Kays et Moffat [18] interprètent leurs résultats expérimentaux comme donnant des valeurs de la constante de

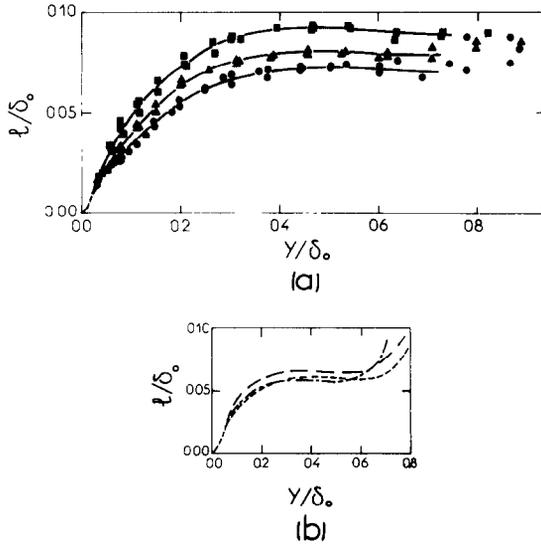


FIG. 4. Longueur de mélange dans la couche limite. (a) effet de l'aspiration: ●,  $A = 0$ ; ▲,  $A = 0.0015$ ; ■,  $A = 0.0030$ . (b) effet de l'injection (Jonsson et Scott [15]): --,  $A = 0$ ; - · - ·,  $A = -0.00087$ ; · · · ·,  $A = -0.0021$ .

Kármán, et par conséquent de la longueur de mélange  $l$ , indépendantes de l'aspiration ou du soufflage.

Les relations (13), (17) et (18) permettent d'obtenir, après intégration, la loi de paroi:

$$-\frac{2}{A^+}(1-A^+u^+)^{1/2} = \frac{1}{K} \log \left| \frac{y}{d} \right| \quad (19)$$

où  $d$  est une constante dépendant de  $A^+$ . Les expressions analytiques proposées diffèrent essentiellement suivant les hypothèses faites pour déterminer  $d$ . Parmi les expressions proposées, celle de Stevenson [2] semble la mieux adaptée à nos résultats expérimentaux (Fig. 5):

$$\frac{2}{A^+} [1 - (1 - A^+u^+)^{1/2}] = \frac{1}{K} \log y^+ + C + \frac{2}{A^+} \quad (20)$$

où  $K$  est supposé indépendant de l'aspiration.  $C + 2/A^+$  varie peu avec  $A^+$ ; il est pris égal à  $C_0$  qui est la constante intervenant dans l'expression de  $u^+$  sans aspiration:

$$u^+ = \frac{1}{K} \log y^+ + C_0. \quad (21)$$

Ainsi, la répartition de la pseudo-vitesse

$$\frac{2}{A^+} [1 - (1 - A^+u^+)^{1/2}]$$

en fonction de  $y^+$  est peu affectée par l'aspiration (Fig. 5) dans la zone linéaire du profil de vitesse comme cela avait été constaté par Stevenson [2]. On décèle cependant une légère diminution de la pente avec l'aspiration, ce qui est conforme à l'augmentation de la longueur de mélange avec l'aspiration (Fig. 4).

Des comparaisons ont été faites par ailleurs [7] avec les expressions proposées par Tennekes [3] et par Simpson, Kays et Moffat [4]. Les expressions ne peuvent être ajustées aux résultats expérimentaux obtenus qu'à condition de modifier les coefficients de frottement dans des proportions notables.

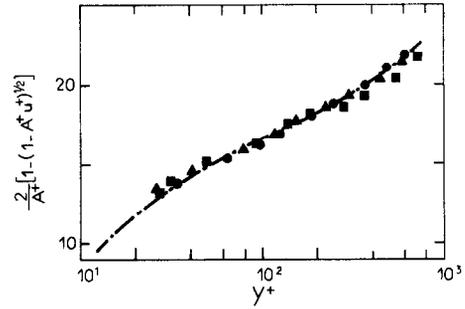


FIG. 5. Comparaison des profils expérimentaux de vitesse dans la région pleinement turbulente (représentation de Stevenson [2]).  $U_e = 12 \text{ ms}^{-1}$ ;  $U_0^* = 0.47 \text{ ms}^{-1}$ ;  $\Theta_p - \Theta_e \simeq 21 \text{ K}$ ;  $\delta_0 = 62 \text{ mm}$ ;  $X' = 13\delta_0$ ;  $\delta_a = 48 \text{ mm}$ . - · - · ● - · - ·,  $A = 0$  ( $A^+ = 0$ ); ▲,  $A = 0.0015$  ( $A^+ = 0.032$ ); ■,  $A = 0.0030$  ( $A^+ = 0.055$ ).

### (iii) Expressions analytiques des profils de température moyenne

D'une façon similaire à ce qui est fait pour les vitesses moyennes, l'analyse dimensionnelle montre que la distribution de température moyenne, dans la région interne, doit être de la forme:

$$\theta^+ = F(y^+, Pr, A^+). \quad (22)$$

Compte-tenu de l'hypothèse de Boussinesq [19] on peut écrire, d'après (6) et (9):

$$\frac{q}{\tau} = -C_p \frac{\bar{v}/Pr + v_t/Pr_t}{\bar{v} + v_t} \frac{\partial \theta / \partial y}{\partial \bar{u} / \partial y}. \quad (23)$$

D'après les relations (13) et (14), qui impliquent d'ailleurs que les variations en  $x$  sont négligeables, on obtient:

$$\frac{d\theta^+}{du^+} = \frac{1 - A^+\theta^+}{1 - A^+u^+} \frac{\bar{v} + v_t}{\bar{v}/Pr + v_t/Pr_t}. \quad (24)$$

Dans la sous-couche "conductrice", on en déduit:

$$\theta^+ = \frac{1}{A^+} [1 - e^{-A^+ Pr}]. \quad (25)$$

Dans la région pleinement turbulente, en supposant  $Pr_t$  constant, on obtient, dans le cas sans aspiration:

$$\frac{\theta^+}{Pr_t} = \frac{1}{K} \log y^+ + F_0 \quad (26)$$

où  $F_0$  est une constante qui dépend de  $Pr_t$ .

Avec aspiration, l'intégration de l'équation (24) entraîne

$$(1 - A^+\theta^+)^{1.2Pr_t} = M(1 - A^+u^+)^{1/2} \quad (27)$$

où  $M$  est une constante dépendant de  $A^+$  et de  $Pr_t$  qui doit être égale à l'unité pour  $A^+ = 0$ . La relation (20) permet alors d'écrire:

$$\frac{2}{A^+} [1 - (1 - A^+\theta^+)^{1.2Pr_t}] = \frac{M}{K} \log y^+ + MC + \frac{2}{A^+}. \quad (28)$$

Lorsque  $A^+$  tend vers zéro, le premier membre de (28) tend vers  $\theta^+/Pr_t$ ; quant à  $M$ , d'après (27), il se met sous la forme:

$$M = \frac{1 - \frac{A^+}{2Pr_t} (\theta^+)_0 + \dots}{1 - \frac{A^+}{2} (u^+)_0 - \dots}$$

ou encore, d'après (21) et (26)

$$M \simeq 1 + (C_0 - F_0) \frac{A^+}{2}. \quad (29)$$

Il en résulte, compte-tenu de  $C + 2/A^+ = C_0$ , que

$$MC + \frac{2}{A^+} = C_0(C_0 - F_0) \frac{A^+}{2} + F_0,$$

groupement qui tend vers  $F_0$  lorsque  $A^+$  tend vers zéro.

D'après les résultats expérimentaux,  $M$  reste faiblement supérieur à l'unité (environ 1,05) et  $K$  augmente légèrement avec l'aspiration (cf. Fig. 4). D'une façon analogue à l'expression de Stevenson pour le profil de vitesse moyenne, on peut proposer la loi de distribution de température moyenne:

$$\frac{2}{A^+} [1 - (1 - A^+ \theta^+)^{1/2 Pr_t}] = \frac{1}{K} \log y^+ + F_0 \quad (30)$$

où  $K$  et  $F_0$  sont indépendants de  $A^+$ .

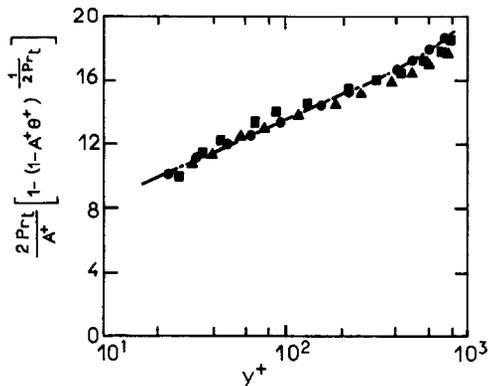


FIG. 6. Comparaison des profils expérimentaux de température dans la région pleinement turbulente (cas No. 2).  $U_e = 12 \text{ ms}^{-1}$ ;  $U_p^* = 0,47 \text{ ms}^{-1}$ ;  $\Theta_p - \Theta_e \approx 22 \text{ K}$ ;  $\Theta_p^* \approx 1,07 \text{ K}$ ;  $\delta_0 = 62 \text{ mm}$ ;  $Pr_t = 0,9$ ;  $X' = 13\delta_a$ ;  $\delta_a = 48 \text{ mm}$ . ---●---,  $A = 0$ ; ▲,  $A = 0,0015$ ; ■,  $A = 0,0030$ .

La Fig. 6 montre que, dans la région pleinement turbulente, la loi de distribution de température moyenne, selon cette expression, est bien vérifiée dans le cas d'expérience No. 2. On peut donc obtenir le profil de température, en présence d'aspiration, à partir du profil de vitesse sans aspiration. Dans le cas d'expérience No. 1, le regroupement ne serait pas aussi bien réalisé [7], ce qui est vraisemblablement lié au fait que le régime thermique n'est pas complètement développé.

#### 4. CONCLUSIONS

Une étude phénoménologique d'une couche limite turbulente sur plaque plane avec aspiration et chauffage à la paroi a été effectuée.

Deux cas d'expérience ont été considérés pour le champ thermique. Dans le premier cas, le début du chauffage coïncide avec celui de l'aspiration; dans le second cas, il est pratiquement confondu avec la ligne de transition à la turbulence.

L'analyse des résultats permet de dégager les points suivants:

(a) Les hypothèses généralement admises dans la région interne de la couche limite concernant le flux de masse orthogonal à la paroi, la tension de frottement et la densité de flux de chaleur orthogonal à la paroi sont d'autant mieux vérifiées que l'aspiration augmente, dans la limite des taux d'aspiration utilisés, tout au moins dans le second cas d'expérience.

(b) L'expression de Stevenson relative aux vitesses moyennes est bien vérifiée dans la région pleinement turbulente. En ce qui concerne le profil de température avec aspiration, une expression analytique est proposée. Ainsi, on peut déduire le profil de température avec aspiration de celui de vitesse sans aspiration.

*Remerciements*—Ces travaux ont été effectués dans le cadre de conventions C.E.A.-I.M.S.T. Les auteurs tiennent à remercier Monsieur R. Dumas pour ses conseils et Monsieur M. Astier pour sa participation technique.

#### REFERENCES

1. T. J. Black et A. J. Sarnecki, The turbulent boundary layer with suction or injection, Aero. Res. Council Report. 20.501 (1958).
2. T. N. Stevenson, A law of the wall for turbulent boundary layers with suction or injection, College of Aero. Cranfield. Rep. Aero. No. 166 (1963).
3. H. Tennekes, Similarity laws for turbulent boundary layers with suction or injection, Thèse doctorat, Delft (1964).
4. R. L. Simpson, W. M. Kays et R. J. Moffat, The turbulent boundary layer on a porous plate: an experimental study of the fluid dynamics with injection and suction, Report H.M.T. 2, Thermosciences Division, Dpt. Mech. Eng., Stanford University (1967).
5. A. Favre, Equations des gaz turbulents compressibles, I. Formes générales; II. Méthode des vitesses moyennes; méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique, *J. Mécanique* 4(3 et 4), 361-421 (1965).
6. A. Favre, Equations statistiques des fluides turbulents compressibles, *Comptes rendus du cinquième congrès canadien de Mécanique Appliquée. CANCAM 75*, Frédéricion (1975).
7. E. Verollet, Etude d'une couche limite turbulente avec aspiration et chauffage à la paroi, Thèse de Doctorat ès-Sciences, Université de Provence, Marseille (1972).
8. E. A. Brun et R. Lecardonnel, Echauffement d'un corps placé dans un courant d'air rapide, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* 202, 555-556 (1936).
9. A. Favre, R. Dumas et E. Verollet, Couche limite sur paroi plane poreuse avec aspiration, Xème Congrès Int. de Mécan. Appl., Stresa (1960); P.S.T. Min. Air, No. 377, Paris (1961).
10. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York (1960).
11. J. O. Hinze, *Turbulence*. McGraw-Hill, New York (1959).
12. L. Howarth, *Modern Developments in Fluid Dynamics—High Speed Flow*, Vol. II. Clarendon Press, Oxford (1953).
13. D. Coles, *A Survey of Data for Turbulent Boundary Layers with Mass Transfer. Turbulent Shear Flows-Meeting*. AGARD, London (1971).
14. E. Baker, Influence of mass injection on turbulent flows near wall, in *Progress in Heat and Mass Transfer*, Vol. 1, pp. 99-192. Pergamon Press, Oxford (1969).
15. V. K. Jonsson et C. J. Scott, Uniform air injection into a turbulent boundary layer flow over an axial circular cylinder, Minneapolis, University of Minnesota (1965).
16. R. Dumas, Contribution à l'étude des spectres de turbulence, Publ. Sc. Tech. Min. Air, No. 404, Paris (1964).
17. L. Fulachier, Contribution à l'étude des analogies des champs dynamique et thermique dans une couche limite turbulente, Effet de l'aspiration, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Provence, Marseille (1972).
18. P. S. Andersen, W. M. Kays et R. J. Moffat, Experimental results for the transpired turbulent boundary layer in an adverse pressure gradient, *J. Fluid Mech.* 69(2), 353-375 (1975).
19. E. R. G. Eckert et R. M. Drake, *Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, New York (1959).

PHENOMENOLOGICAL STUDY OF A TURBULENT BOUNDARY LAYER  
WITH WALL SUCTION AND HEATING

**Abstract**—A checking of the assumptions generally accepted in the case of the inner region of a turbulent boundary layer with wall heating and suction is carried out. In the fully turbulent zone of the boundary layer, an analytical expression for the temperature profile with suction is proposed. It enables us to deduce the temperature profile with suction from the velocity profile without suction.

PHÄNOMENOLOGISCHE UNTERSUCHUNG EINER TURBULENTEN  
GRENZSCHICHT MIT WANDABSAUGUNG UND WANDBEHEIZUNG

**Zusammenfassung**—Die üblicherweise für den Innenbereich einer turbulenten Grenzschicht mit Wandabsaugung und Wandbeheizung angenommenen Hypothesen werden überprüft. Für den rein turbulenten Bereich der Grenzschicht wird ein analytischer Ausdruck für das Temperaturprofil bei Absaugung vorgeschlagen. Dieser Ausdruck erlaubt die Bestimmung des Temperaturprofils mit Absaugung aus dem Geschwindigkeitsprofil ohne Absaugung.

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО  
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОТСОСА И НАГРЕВА СТЕНКИ

**Аннотация** — Рассматриваются общепринятые допущения о внутренней области турбулентного пограничного слоя при наличии отсоса и нагрева стенки. Предложено аналитическое выражение для профиля температуры в области турбулентного ядра пограничного слоя при наличии отсоса. Данное выражения позволяет определить температурный профиль при наличии отсоса через профили скорости, полученные без отсоса.